Campbell
SCIENTIFIC®

ChinaFLUX第十八次通量观测理论与技术培训

(沈阳，2023年8月17-18日)

大气波谱的基本概念及通量观测高频资料的谱分析

杨柏 (byang@campbellsci.com)

Campbell Scientific Inc

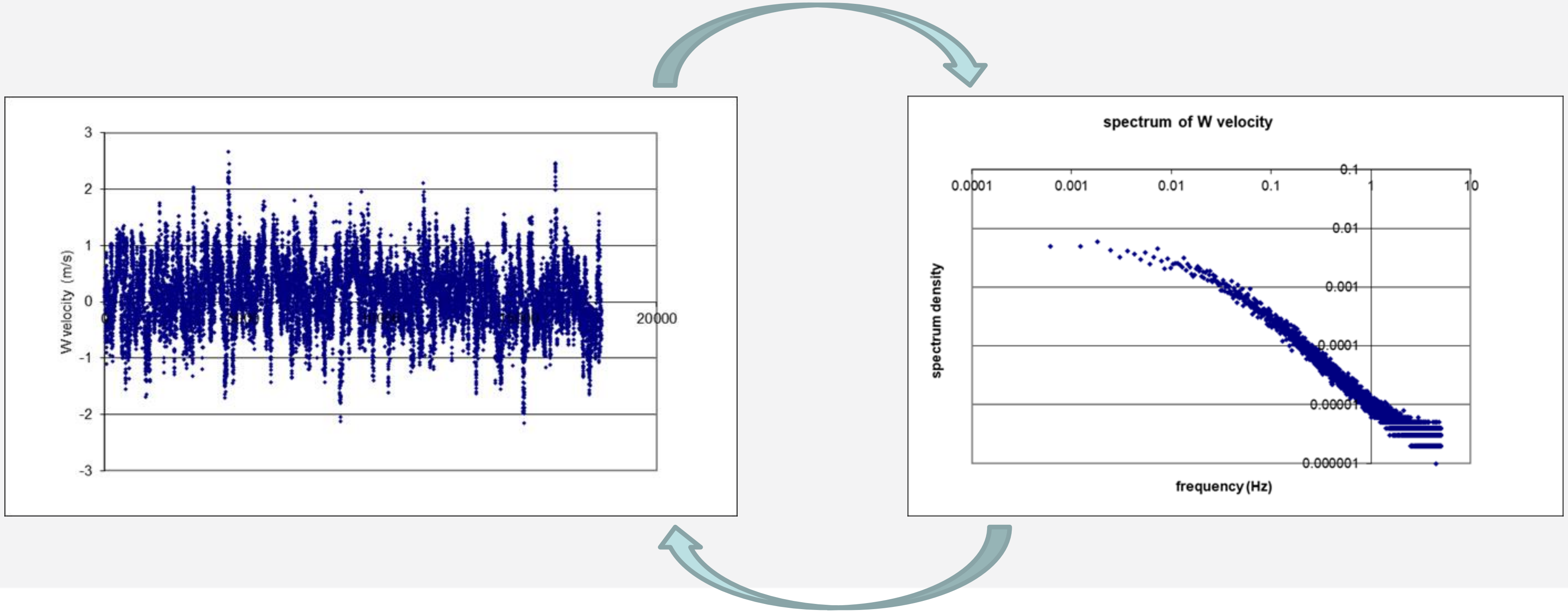
什么是谱?

一个变量（质量或者能量）在频率或者波数域的分布

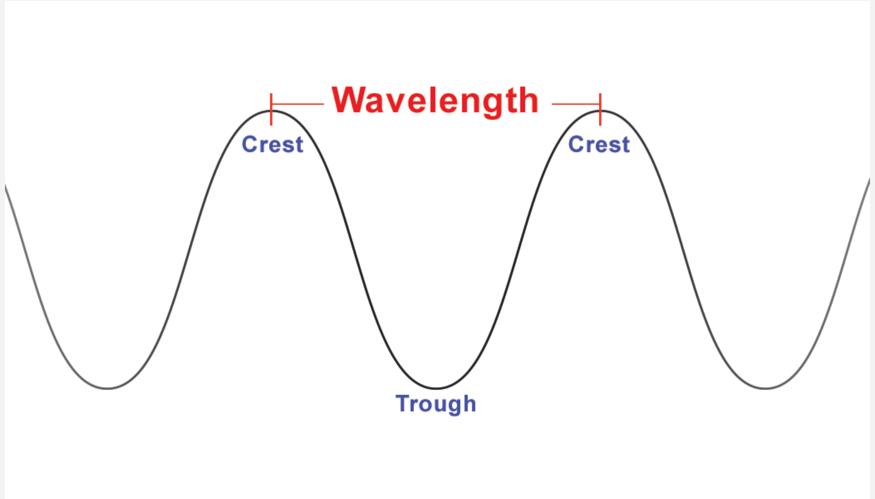
- 方差谱：经常应用在单一变量（比如，空气温度，CO_2密度或者水汽密度）的方差上。
- 湍流动能谱：应用在风速分量(u, v, w)的方差上
- 协方差（或者交叉）谱：应用在两个变量的协方差上（比如，CO_2通量）

谱分析的本质

- 把一个连续的时间序列（一个信号）沿着频率域分解开来并且估算其在不同频率上的对总（协）方差的相对贡献
- 把一个信号从时间域上转换到频率域上，或者从频率域上转换到时间域上



- 大气波：在时间域上或者空间上可分辨的带有周期性的大气运动
- 频率(f in Hz)：一个周期性事件或者现象在单位时间内重复发生的次数
- 周期(P in s)：一个周期性事件或者现象完成一个周期所需的时间
- 波长（λ in m）：是指波在一个振动周期内传播的距离。也就是沿着波的传播方向,两个相邻的波峰或者波谷之间的空间距离
- 波数(k in m^{-1}): 是指在一个单位长度内, 一列波所包含的完整周期数



$P=\frac{1}{f}$, $\lambda = \frac{1}{k}$, $u = \frac{\lambda}{P} = \lambda \cdot f = \frac{f}{k}$

u --- 波的传播速度 (m/s)

傅里叶(Fourier)变换

Fourier 变换：把一个连续函数（时间序列）变换成另一种方式来描述这个函数包含的周期（频率）特性。

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

ω --- 角频率
$f(t)$ --- 原函数(时间域)
$F(\omega)$ --- 变换函数(频率域)

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{P}$$

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$$

Fourier反变换: $f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}\,\mathrm{d}\omega$

傅里叶(Fourier) 级数

Fourier 级数：傅里叶变换的一种特例。一个在$-\frac{T}{2} \le t \le \frac{T}{2}$区间的周期性函数,$f(t)$,可以被表示为一系列三角函数（级数）的和。

$$F_{\mathrm{n}} = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-i2\pi nt/T}\,\mathrm{dt}$$

n/T--- 频率, *2πn/T*--- 角频率
f(t) --- 原函数(时间域)
F_n --- 傅里叶系数或者变换函数(频率域)

Fourier反变换: $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(F_n e^{i2\pi nt/T}\right)$

Fourier 级数

Fourier series $f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(F_n e^{i2\pi nt/T}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (F_n)\left(\cos\frac{2\pi nt}{T} + i\sin\frac{2\pi nt}{T}\right)$

Fourier coefficient $F_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-i2\pi nt/T}\, dt$

$$= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\left(\cos\frac{2\pi nt}{T} - i\sin\frac{2\pi nt}{T}\right) dt$$

$$f(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\cos\frac{2\pi nt}{T} + i\sin\frac{2\pi nt}{T}\right)\cdot\left\{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\left(\cos\frac{2\pi nt}{T} - i\sin\frac{2\pi nt}{T}\right) dt\right\}$$

keep real part only

$$f(t) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\cos\frac{2\pi nt}{T}\cdot\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cdot\cos\frac{2\pi nt}{T}\, dt + \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sin\frac{2\pi nt}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}\, dt$$

$$= \frac{1}{T}\left\{\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, dt + \sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{2\pi nt}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}\, dt + \sum_{-\infty}^{n=-1}\cos\frac{2\pi nt}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}\, dt\right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2\pi nt}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}\, dt + \sum_{-\infty}^{n=-1}\sin\frac{2\pi nt}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}\, dt\right\}$$

Now $\sum_{-\infty}^{n=-1}\cos\frac{2\pi nt}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{2\pi(-n)t}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos\frac{2\pi(-n)t}{T}\, dt$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{2\pi nt}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\cos\frac{2\pi nt}{T}\, dt$$

similarly $\sum_{-\infty}^{n=-1}\sin\frac{2\pi nt}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}\, dt = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2\pi nt}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}\, dt$

finally

$$f(t) = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, dt + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{2\pi nt}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\frac{2\pi nt}{T}\, dt + \frac{2}{T}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{2\pi nt}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\frac{2\pi nt}{T}\, dt$$

傅里叶(Fourier) 级数

Fourier series: $$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n * \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n * \sin(\frac{2\pi nt}{T})\right]$$

Where: $a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt$

$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos(\frac{2\pi nt}{T})dt$

$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)sin(\frac{2\pi nt}{T})dt$

傅里叶级数的意义：一个在时间域的周期性（周期为T）函数或者时间序列可以被分解为一系列不同频率的三角级数（正弦或余弦函数）。

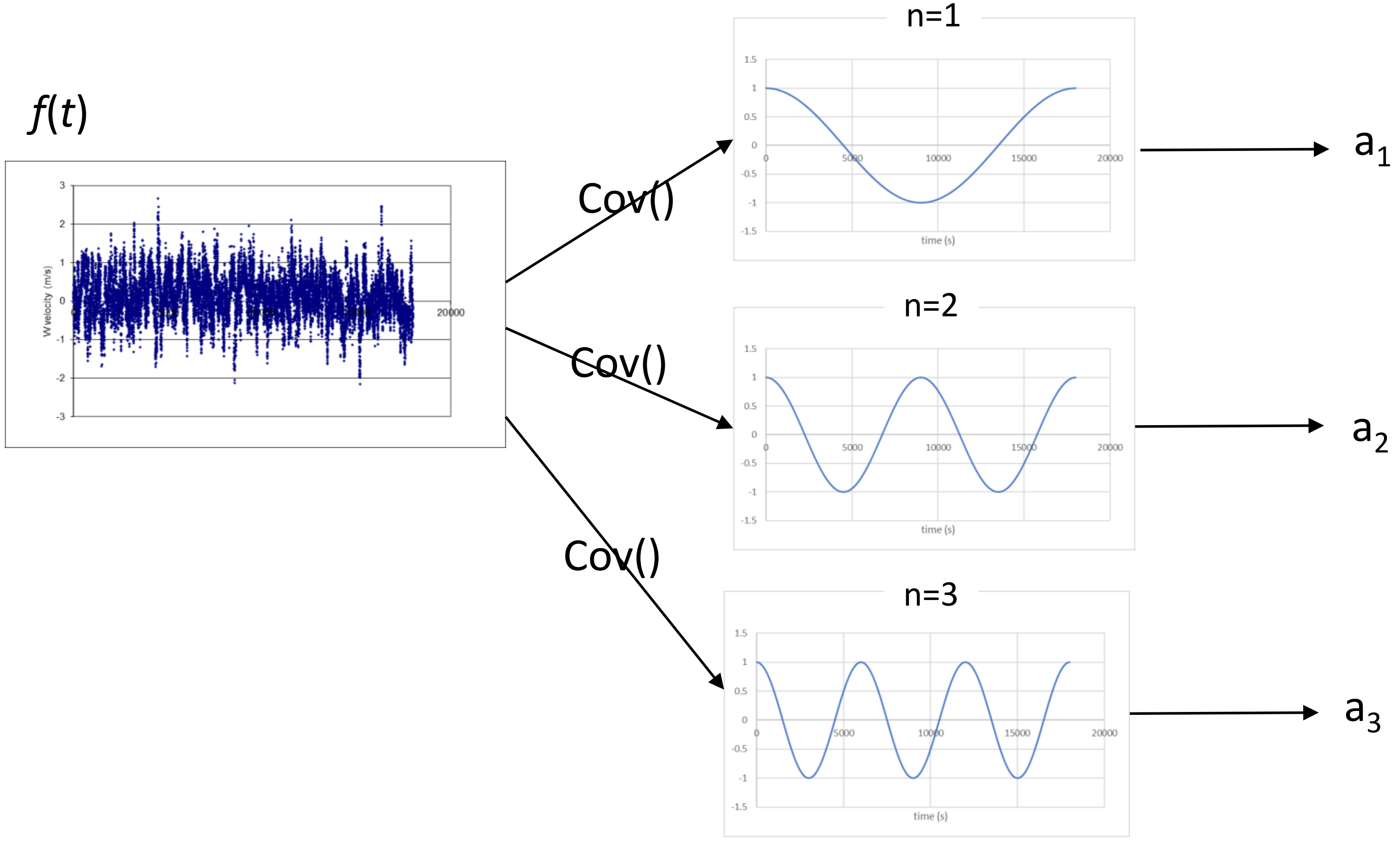
Fourier变换的本质

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\,\mathrm{d}t$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)dt$$

$$\cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)$$



n=4, 5, 6 ……

动能谱

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega\right]dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt\right]d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)F(-\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2 d\omega$$

对于Flourier级数:

方差 $(f(t))=\sum_{k=1}^{\infty}(a_k * a_k + b_k * b_k)$

如果 $f(t)$是一个风速观测时间序列，它的方差代表了其携带的动能。Flourier系数(a_k and b_k)是从时间序列分解出的不同频率的正弦波和余弦波的振幅。所以对 $f(t)$ 的谱分析结果是一个动能沿频率分布的情况（动能谱）。

交叉谱

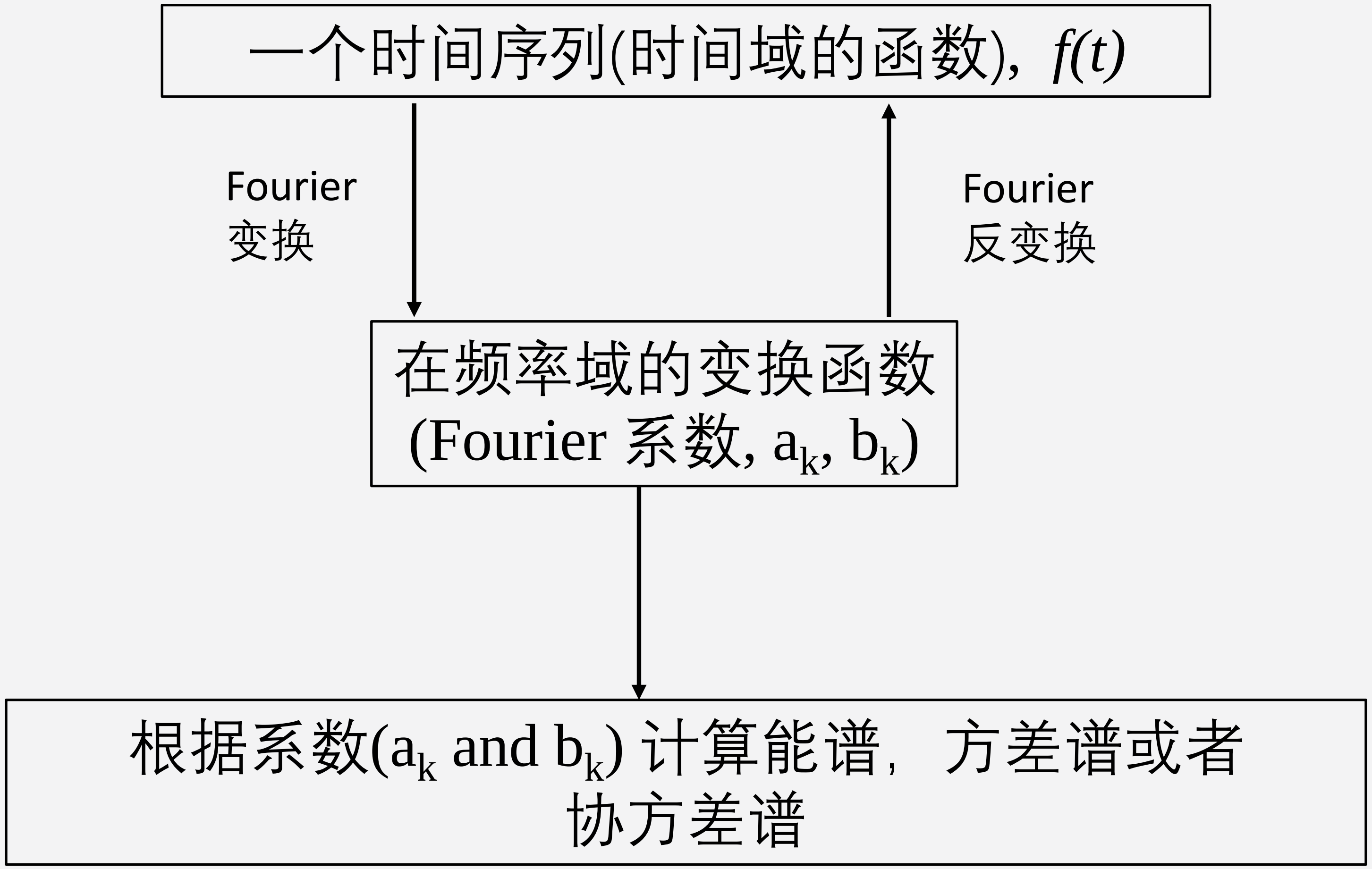
$$f_x(t) = \mathrm{a}_{x0} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_{xk} * \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_{xk} * \sin(\frac{2\pi kt}{T})\right]$$

$$f_y(t) = \mathrm{a}_{y0} + \sum_{k=1}^{\infty}\left[a_{yk} * \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right) + b_{yk} * \sin(\frac{2\pi kt}{T})\right]$$

$$\boxed{\text{协方差}(fx(t),fy(t))=\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{xk} * a_{yk} + b_{xk} * b_{yk}\right)}$$

对两个时间序列(*fx*(*t*) and *fy*(*t*))做交叉谱分析的结果是两个序列的协方差沿着频率的分布，或者说协方差在每个频率上（对于总协方差）的相对贡献。

谱分析过程的图解

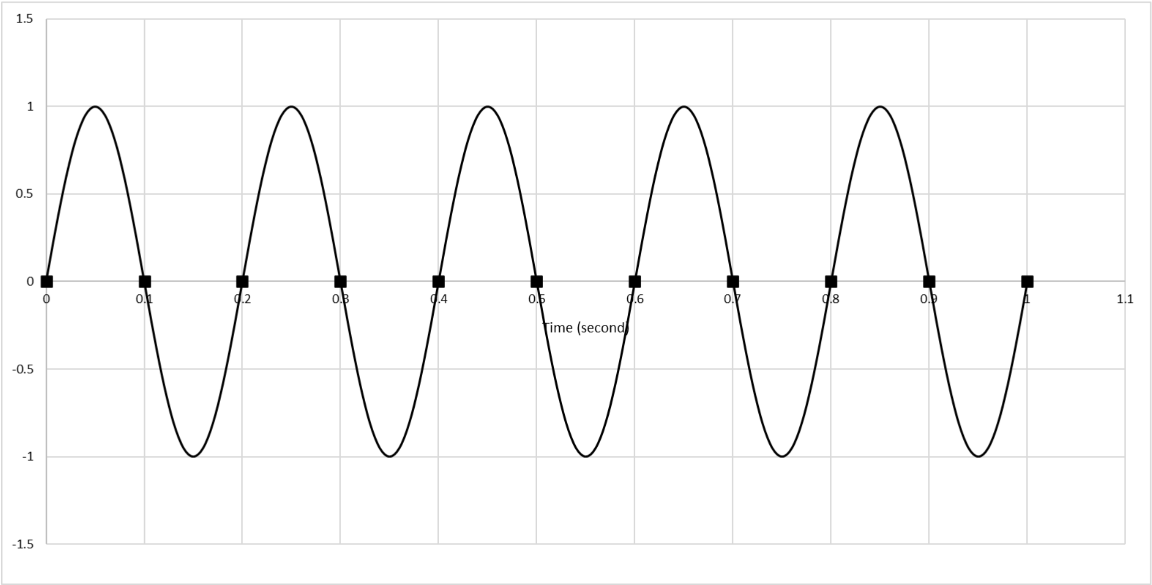

一个时间序列(时间域的函数)，$f(t)$
Fourier 变换
Fourier 反变换
在频率域的变换函数 (Fourier 系数, a_k, b_k)
根据系数(a_k and b_k) 计算能谱，方差谱或者协方差谱

Nyquist frequency

$y(t) = A * \sin(2\pi f t + \varphi)$

A – 振幅　f – 信号频率(s^{-1})

t – 时间(s)　φ -- 位相 (radians)



$y(t) = A * \sin(2\pi f t + \varphi)$

f = 5

如果观测频率是10 Hz，在一个周期内我们能恰好得到三个观测值

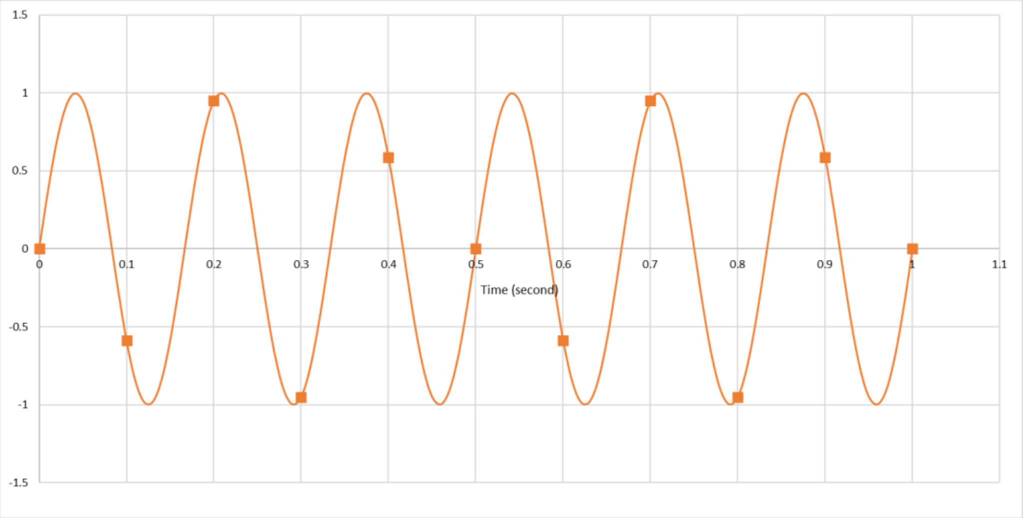
问题: 如果我们测量一个正弦波，每隔时间t就能得到一个y值。原正弦波的表达方程里还有几个未知量？我们需要几个独立方程来求出所有的未知量？

Nyquist frequency

$y(t) = A * \sin(2\pi f t + \varphi)$

A – 振幅　f – 信号频率(s^{-1})

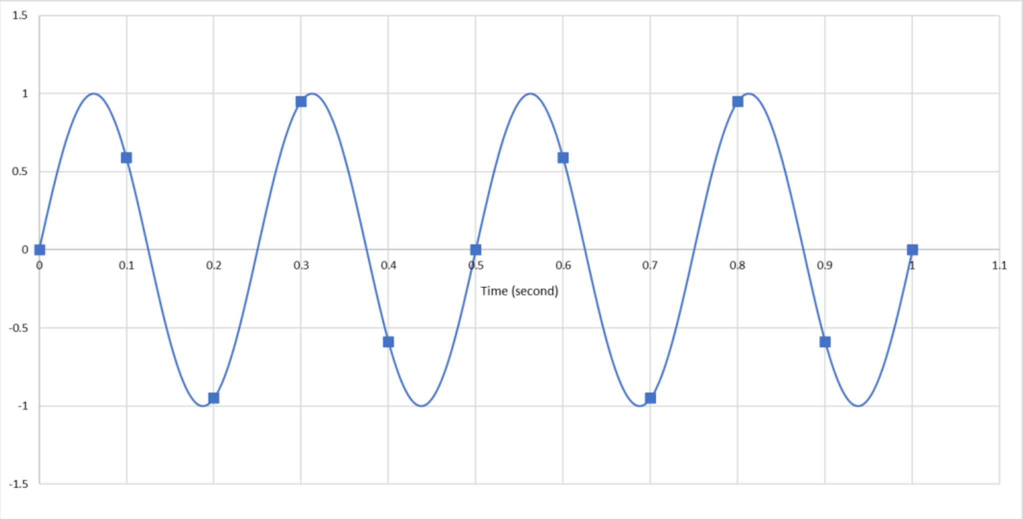
t – 时间(s)　φ -- 位相 (radians)



$y(t) = A * \sin(2\pi f t + \varphi)$

f = 6

在一个周期内的观测值少于三个，我们不能求解出原方程的未知量。



$y(t) = A * \sin(2\pi f t + \varphi)$

f = 4

在一个周期内的观测值至少有三个，我们可以求解出原方程的未知量。

能量（谱）混叠

f_M --- 取样或者测量频率；$f_N = f_M/2$--- Nyquist frequency

两个正弦波：$\sin(2\pi f_1 t + \varphi_1), \sin(2\pi f_2 t + \varphi_2)$
$f_1 = f_N + \Delta f$, $f_2 = f_N - \Delta f$

$$\sin(2\pi f_1 t + \varphi_1) - \sin(2\pi f_2 t + \varphi_2) = 2\cos(2\pi f_N\, t + \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}) * \sin(2\pi \Delta f\, t + \frac{\varphi_1-\varphi_2}{2})$$
$$= 2\cos(\pi f_M\, t + \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}) * \sin(2\pi \Delta f\, t + \frac{\varphi_1-\varphi_2}{2})$$

不管Δf的大小, 上式总能是零，只要
$$\pi f_M t + \frac{\varphi_1+\varphi_2}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots\ldots, \frac{(2fM-3)\pi}{2}, \frac{(2fM-1)\pi}{2}$$

在1秒时段里，在下面观测点上两个正弦波总是等值的
$$t = \frac{1-\frac{\varphi_1+\varphi_2}{\pi}}{2f_M}, \frac{3-\frac{\varphi_1+\varphi_2}{\pi}}{2f_M}, \frac{5-\frac{\varphi_1+\varphi_2}{\pi}}{2f_M} \ldots\ldots, \frac{2fM-3-\frac{\varphi_1+\varphi_2}{\pi}}{2f_M}, \frac{2fM-1-\frac{\varphi_1+\varphi_2}{\pi}}{2f_M}$$

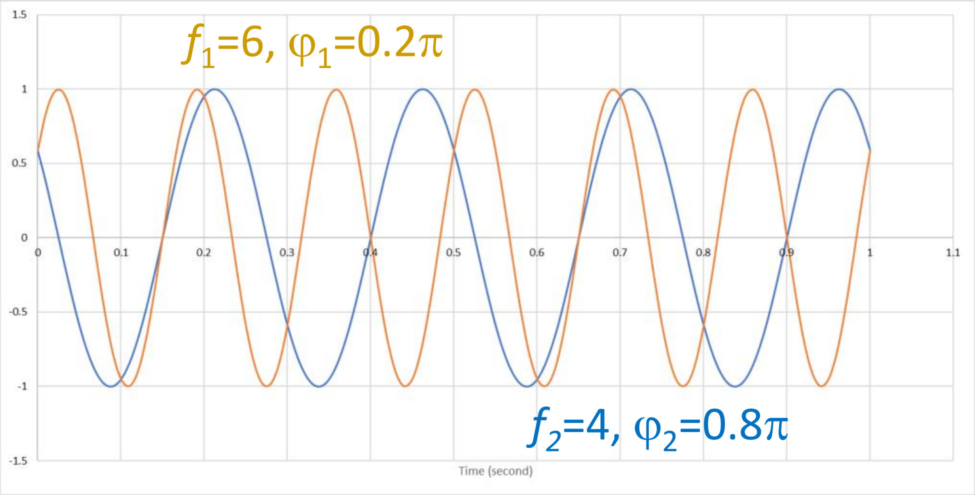
能量（谱）混叠

f_M --- 取样或者测量频率；$f_N = f_M/2$--- Nyquist frequency

两个正弦波：$\sin(2\pi f_1 t + \varphi_1), \sin(2\pi f_2 t + \varphi_2)$
$f_1 = f_N + \Delta f$, $f_2 = f_N - \Delta f$, $\varphi_1 = \pi - \varphi_2$

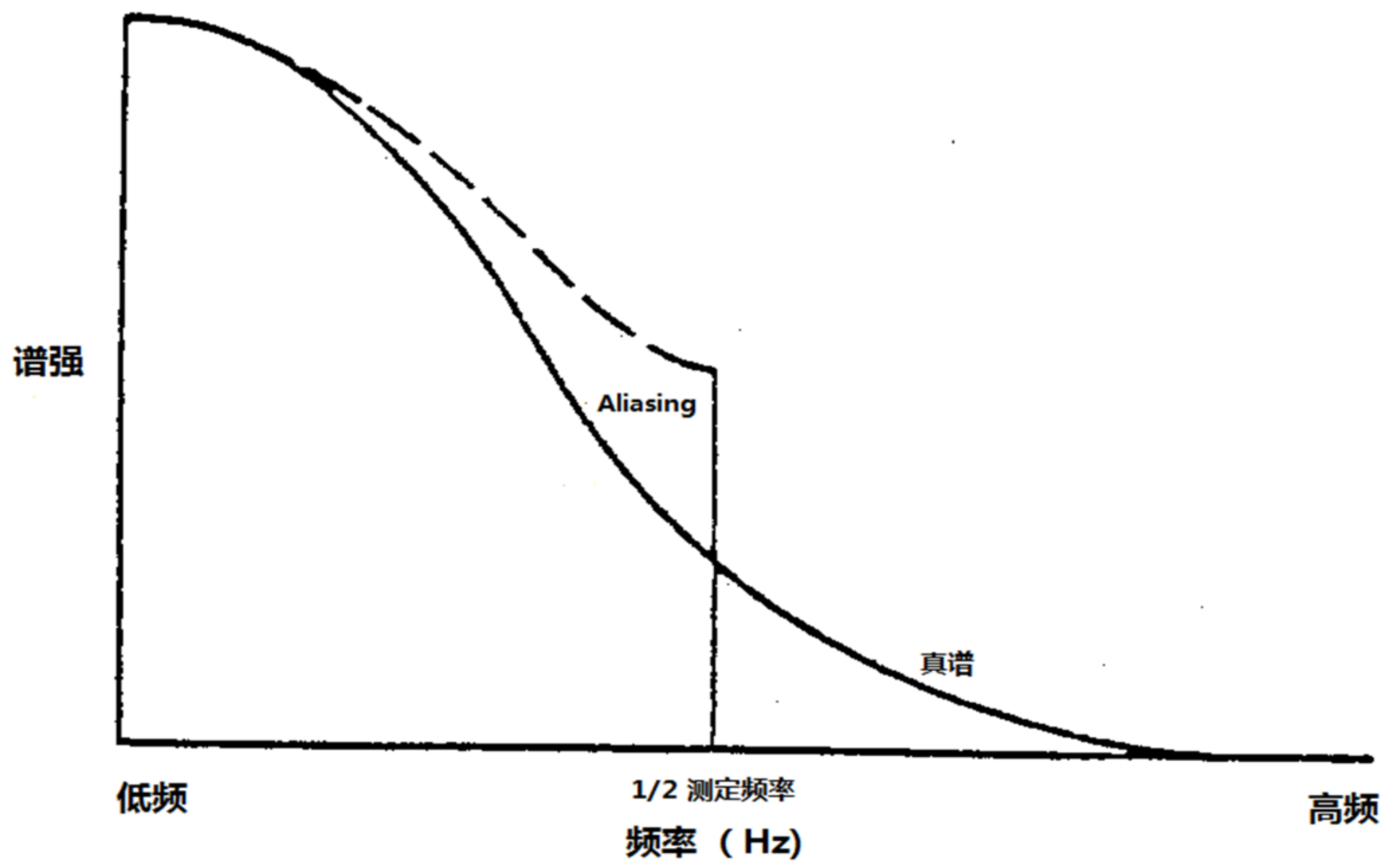
在1秒时段里，在下面观测点上两个正弦波总是等值的

$t = \frac{0}{2f_M}, \frac{2}{2f_M}, \frac{4}{2f_M} \ldots\ldots, \frac{2fM-4}{2f_M}, \frac{2fM-2}{2f_M} = 0, \frac{1}{f_M}, \frac{2}{f_M} \ldots\ldots, 1 - \frac{2}{f_M}, 1 - \frac{1}{f_M}$



在这个例子中，观测频率f_M=10，正弦波#1的频率大于Nyquist频率，所以不能被识别。而两个正弦波在每个观测时间点上都是等值的，所以正弦波#1被错误地当成了#2，它在频率f1的能量被错误地归到了频率f2，因此发生了能量混叠。

能量（谱）混叠图解



Aliasing（混叠）：由于观测频率不能无限大，大于Nyquist频率(1/2测量频率)的信号谱不能显示在它自己频率上，而是错误地被显示在小于Nyquist 频率范围内。

Nyquist频率及能量混叠小结

- 如果我们测量湍流的频率设在f_M，我们只能识别分辨出频率小于Nyquist频率($f_M/2$)的波动，而漏掉了频率大于Nyquist频率的波动。

- 对于两个波（一个波动频率小于Nyquist频率而另一个频率大于Nyquist频率），只要满足条件: $f_1+f_2=f_M$, $\varphi1+\varphi2=\pi$，快波（高频）总会被错误地识别成慢波（低频）。

- 由于观测频率的限制，快波携带的能量被错误地归到慢波上，造成能量混叠。

高频资料谱分析应用举例

Thank you!

CANADA
USA
COSTA RICA
BRAZIL
UK
GERMANY
FRANCE
SPAIN
SOUTH AFRICA
CHINA
SOUTHEAST ASIA
AUSTRALIA